TD n° 6 – Analyse harmonique sur les surfaces hyperboliques compactes

Exercice 1. *Laplacien hyperbolique* L'opérateur laplacien sur $\mathbb{H}^2$ s'écrit, pour tout système de coordonnées réelles (x_1, x_2)

$$\Delta = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right),$$

où g est la représentation matricielle de la métrique hyperbolique dans les coordonnées (x_1, x_2), de sorte que

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} dx_i dx_j,$$

et $g^{ij} = (g^{-1})_{ij}$ est un coefficient de la matrice inverse.

1. Donner une expression de Δ dans les représentations du demi-plan et du disque.
2. Montrer que le laplacien commute avec les opérateurs de translation $T_g : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{H}^2) \to \mathbb{R}$,

$$T_g f(z) = f(g^{-1} z), \quad \forall z \in \mathbb{H}^2, \forall g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}).$$

Exercice 2. *Noyaux invariants et transformée de Selberg* Un noyau invariant sur $\mathbb{H}^2$ est une fonction $k : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \to \mathbb{C}$ telle que

$$k(gz, gw) = k(z, w), \quad \forall z, w \in \mathbb{H}^2, \forall g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}),$$

$$k(z, w) = k(w, z), \quad \forall z, w \in \mathbb{H}^2.$$

Un noyau radial sur $\mathbb{H}^2$ est une fonction $k : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \to \mathbb{C}$ donnée par

$$k(z, w) = f(d(z, w)), \quad \forall z, w \in \mathbb{H}^2,$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction paire.

1. Montrer qu'un noyau radial est invariant.
2. Un noyau invariant définit un opérateur intégral sur les fonctions :

$$A_k f(z) = \int_{\mathbb{H}^2} k(z, w) f(w) d\mu(w).$$

   Montrer que ce noyau passe au quotient sur les surfaces hyperboliques compactes $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$.
3. Montrer que toute fonction propre f de Δ associée à la valeur propre λ est aussi une fonction propre de l'opérateur A_k pour tout noyau radial k. Autrement dit, il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que

$$A_k f(z) = h(\lambda) f(z), \quad \forall z \in \mathbb{H}^2.$$

   Pour cela, on pourra admettre qu'il existe une unique fonction $w \mapsto \omega_\lambda(z, w)$ qui est radiale en z et telle que

$$\omega_\lambda(z, z) = 1,$$

$$\Delta_w \omega_\lambda(z, w) = \lambda \omega_\lambda(z, w).$$

4. La transformée de Selberg du noyau radial k est donnée par

$$\mathcal{S}(k)(\lambda) = h(\lambda) = \int_{\mathbb{H}^2} k(d(\mathrm{i}, w))\omega_\lambda(\mathrm{i}, w)d\mu(w).$$

   On utilisera la paramétrisation $\lambda = s(1-s) = \frac{1}{4} + r^2$, $r \in \mathbb{C}$, et on notera $\mathcal{S}(k)(r) = \mathcal{S}(k)(\lambda)$. Montrer que

$$\mathcal{S}(k)(r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}rt} g(t)dt,$$

   où

$$g(t) = \sqrt{2}\int_{|t|}^{\infty} \frac{k(\rho)\sinh(\rho)}{\sqrt{\cosh(\rho) - \cosh(t)}} d\rho.$$

Exercice 3. *Noyau de la chaleur* Le noyau de la chaleur sur $\mathbb{H}^2$ est un noyau invariant p_t solution fondamentale de l'équation de la chaleur

$$\frac{d}{dt}p_t(z,w) + \Delta_z p_t(z,w) = 0, \quad \forall z, w \in \mathbb{H}^2,$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_{\mathbb{H}^2} p_t(z,w)f(w)d\mu(w) = f(z), \quad \forall f \in \mathscr{C}_c(\mathbb{H}^2), \forall z \in \mathbb{H}^2.$$

1. Montrer que la transformée de Selberg h_t de p_t s'écrit

$$h_t(r) = e^{-(\frac{1}{4}+r^2)t}.$$

2. En déduire que

$$p_t(z,w) = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{t}{4}}}{(4\pi t)^{3/2}} \int_{d(z,w)}^{\infty} \frac{ue^{-\frac{u^2}{4t}}du}{\sqrt{\cosh(u) - \cosh(d(z,w))}}.$$

3. Soit $S = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ une surface hyperbolique compacte. Montrer que

$$\#\{\gamma \in \Gamma : d(z, \gamma w) < T\} \leq Ce^T$$

4. En utilisant la question précédente et en admettant qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$p_t(z,w) \leq \frac{C}{t}e^{-\frac{d(z,w)^2}{8t}},$$

   montrer que

$$\tilde{p}_t(z,w) = \sum_{\gamma\in\Gamma} p_t(z,\gamma w)$$

   est bien défini.

5. Montrer que $\tilde{p}_t$ est un noyau de la chaleur sur S.
6. Montrer que cette solution fondamentale du noyau de la chaleur sur S est unique.

Remarque. Le noyau de la chaleur permet de démontrer (mais on ne va pas le faire !) un théorème fondamental : pour toute surface hyperbolique compacte $S = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$, il existe une base orthonormale $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2(S)$ et une suite $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ de nombres réels tels que $\lambda_n \to \infty$ quand $n \to \infty$, et

$$\Delta\phi_n = \lambda_n\phi_n.$$